Unterrichtsentwurf für die Lehrprobe im Fach Mathematik zur Zweiten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien

Thema der Unterrichtseinheit:
Differentialrechnung einer Veränderlichen

Thema der Stunde:
Einführung in Extremwertprobleme am Beispiel der Kostenminimierung einer Konservendose

Referendar:
Andreas Rothfritz, 4. Semester

Schule:
xxx

Klasse:
xxx

Prüfungskommission:

Mentorin:
xxx

Schulleiter:
xxx

Fachseminarleiterin Mathematik:
xxx

Hauptseminarleiter:
xxx

Prüfungsvorsitzender:
xxx

1. Stunde

Zusammenfassung

Diese Stunde greift die Optimierung einer Konservendose hinsichtlich ihres Materialverbrauches auf. Dies führt auf das zu lösende Extremwertproblem: Wie sieht eine Dose mit minimaler Oberfläche aus, wenn das Volumen vorgegeben ist? Die Aufgabe für die Schülerinnen ist es, dieses Problem mathematisch so zu modellieren, dass es für sie lösbar wird.

Inhalt

1 Bemerkungen zur Lerngruppe

Rahmenbedingungen Ich unterrichte die Klasse Va seit Schuljahresbeginn im selbständigen Ausbildungsunterricht dreimal in der Woche in Mathematik.

Meine Mentorinunterrichtet die Parallelklasse in Mathematik. Mit Hilfe der Schulleitung konnten wir einen Stundenplan erreichen, der eine fruchtbare Zusammenarbeit mit Hospitationen und gemeinsamen Klausuren ermöglicht.

Zusammensetzung Die Klasse Va der Vorstufe besteht aus 15 Schülerinnen und 12 Schülern.[1] Die Klasse ist neu zusammengesetzt. Die Gymnasien xxx und yyy bilden eine gemeinsame Oberstufe. Die Schülerinnen stammen aber nicht nur aus verschiedenen Klassen der Gymnasien xxx und yyy, sondern auch von weiteren Schulen.

xxx und xxx waren das erste Halbjahr über im Ausland. Als sie zum 1.2.2001 zurückkehrten, hatte ich die Grundlagen der Differentialrechnung bereits entwickelt. Diese Grundlagen fehlen den beiden, da sie während des Auslandsaufenthaltes keine entsprechenden Stunden besuchten.

Inhaltliches Vorwissen Die Schülerinnen verfügen über sehr unterschiedliches Vorwissen. Dies ist zwar aufgrund der oben beschriebenen Zusammensetzung der Klasse nicht weiter verwunderlich, hat aber, da dieses unterschiedliche Wissen zudem noch in unterschiedlicher Qualität vorliegt, zur Konsequenz, dass ich im Unterricht nicht auf eine verbindliche Basis aus der Mittelstufe aufbauen kann.

Diese Heterogenität wird auch in dieser Stunde berücksichtigt werden müssen, zumal die Berechnung der Oberfläche eines Zylinders eigentlich Mittelstufenstoff ist.

Der jetzt behandelte Stoff zur Differentialrechnung ist allen bis auf den beiden Wiederholern xxx und xxx neu.

Unterrichtsatmosphäre Die Unterrichtsatmosphäre in der Klasse ist freundlich und konstruktiv. Die Schülerinnen sind zum größten Teil aufmerksam und und lassen sich für mathematische Probleme interessieren.

Leistungsvermögen Auf dem Sitzplan auf Seite 10 befinden sich die Noten des ersten Semesters zur Orientierung. Das Bild des Leistungsvermögens möchte ich holzschnittartig so skizzieren: Es gibt ein Leistungsgefälle von der vorderen Wand- zur Fensterseite, wobei die Wandseite aktiver und stärker ist.

Im Einzelnen kann man drei Gruppen ausmachen: Die Klasse hat keine Schülerin, die man als „Mathecrack“ bezeichnen könnte, wohl aber eine Gruppe von 6 Schülerinnen, die den Unterricht mit Ideen bereichern und diese Ideen auch verfolgen können (xxx, xxx, xxx, xxx, xxx und je nach „Tagesform“ xxx).

Dann gibt es ein Mittelfeld bestehend aus ungefähr 9 Schülerinnen, die im reproduktiven Bereich ihre Stärken haben. Sie beteiligen sich teils von alleine (z.B. xxx) teils auf Aufforderung am Unterricht (z.B. xxx und xxx).

xxx sticht durch großes Engagement, insbesondere durch viele Fragen, hervor. Leider hat sie ebenso große Schwierigkeiten, abstrakte Zusammenhänge zu verstehen. Ich muss stets abwägen, ob ihre Fragen individuell im Anschluss an die Stunde oder im Plenum, welches ab und zu genervt reagiert, beantwortet werden sollen.

Zur Zeit gibt es drei besonders schwache Schülerinnen (xxx, xxx, und xxx).

[1] Im Folgenden schreibe ich Schülerinnen und schließe dabei stets auch die Schüler mit ein.

2 Didaktische Bemerkungen und Begründungen

2.1 Zum Verhältnis von Extremwertproblem und Analysis

Der Unterricht der Vorstufe führt die Analysis ein, indem sich die Schülerinnen in die Differentialrechnung einer veränderlichen Größe einarbeiten. Zur Erfindung der Differentialrechnung haben hauptsächlich drei (nicht nur) damals anwendungsbezogenen Fragestellungen Anstoß gegeben: Das Tangentenproblem, das Geschwindigkeitsproblem und das Extremwertproblem (vgl. [8]).

Der Lehrplan stellt die Anwendungsbezogenheit der Mathematik vor einen fachsystematischen Ausbau und entwickelt Leitideen, die den Unterricht strukturieren sollen (vgl. [3, S. 9]). Als eine der grundlegenden Anwendungsprobleme verknüpfen die Extremwertprobleme drei dieser Leitideen:

- mathematische Problembeschreibung mit Hilfe von Funktionen,
- Beschreibung des Änderungsverhaltens von Funktionen,
- Anwendungsfähigkeit der Analysis.

Indem in Extremwertaufgaben ein Problem mathematisch in einem funktionalen Zusammenhang modelliert wird, wird es der Untersuchung mit Hilfe der Differentialrechnung zugänglich. Lokale Extremstellen sind notwendig solche, in denen die momentane Änderungsrate der Funktionswerte Null ist. Somit zeigt die Analysis den Schülerinnen, dass sie anwendungsfähig ist.

2.2 Allgemeinbildender Aspekt

Das Reizvolle an Extremwertproblemen ist, dass sie in gewisser Weise „unsere alltäglichen Probleme idealisieren“[7, S. XI]: einen Gegenstand zum niedrigst möglichen Preis erwerben, größtmögliche Wirkung mit einem bestimmten Aufwand erreichen etc. Das Variationsprinzip der klassischen Mechanik zeigt, wie ungeheuer kraftvoll das Extremalprinzip in der unbelebten Natur sein kann. Für mich bieten Extremwertaufgaben eine weitere Motivation in diesem Zusammenhang. Es lassen sich hier auch die Grenzen der Mathematisierung kritisch beleuchten. Die Eindimensionalität ausschließlich technischer Optimierung zeigt sich darin, dass sie blind nur einem vorgegebenen Zweck folgt.

2.3 Einbindung von Extremwertproblemen

Als Anwendung werden Extremwertaufgaben in vielen Schulbüchern der Kurvendiskussion nachgestellt, so auch im Buch der Schülerinnen (vgl. [6]). Dies widerspricht der oben genannten Zielsetzung des Lehrplanes, die Analysis sei anwendungsorientiert zu entwickeln. Stellvertretend für ein anderes Vorgehen fordert Heinz Böer mit der Begründung „die Hoch- und Tiefpunktbestimmung braucht man für die Kurvendiskussion, nicht umgekehrt“[1, S. 40] stets Extremwertprobleme vor der Kurvendiskussion zu behandeln. Ich folge dieser Aufforderung insofern, als dass ich die Extremwertprobleme als Anlass für eine Verfeinerung der Kurvendiskussion nutzen möchte, insbesondere zur Motivation nach der Suche nach hinreichenden Bedingungen für Extremstellen (s. S. 4).

2.4 Was gelernt werden kann: Modellierung

Neben dem eben benannten Aspekt der Motivation spricht für die Behandlung von Extremwertproblemen insbesondere, dass daran exemplarisch die Mathematisierung eines technischen Problems, die schrittweise Präzisierung der Fragestellung und die schrittweise Präzisierung des Rechenansatzes, insgesamt also der typische Viererschritt bei einer mathematischen Modellbildung deutlich wird. Die Modellierung besteht aus folgenden vier Schritten:

- von der Realsituation zur
- Modellbildung,
- Arbeiten im mathematischen Modell
- durch Reinterpretation zurück zum Realproblem

Diese Schritte werden bei der Betrachtung eines Extremwertproblems durchlaufen.

2.5 Voraussetzungen aus didaktischer Sicht

Zur erfolgreichen Modellierung sind aus didaktischer Sicht folgende Schritte wesentlich (vgl. [2, S. 58]):

1. Um eine funktionale Sicht des Problems zu erwerben, bedarf es zunächst der Einsicht, was überhaupt *variiert* werden soll, damit etwas extremal wird.
2. Die zu optimierende Größe muss explizit als eine Funktion der variierbaren Größen aufgefasst werden.

   Meist hängt die Funktion von verschiedenen Größen ab. Da die Schülerinnen kein Verfahren zur Bestimmung von Extremstellen einer Funktion mehrerer Variablen kennen, wird ihnen bewusst, dass sie eine Beziehung zwischen den Größen suchen müssen.
3. Mit Hilfe dieser Nebenbedingung kann das Problem als Funktion in einer Variablen ausgedrückt werden.
4. Damit reduziert sich das Problem auf die Bestimmung der Extremstellen einer Funktion in einer Variablen. Dazu gibt es verschiedene Verfahren, von denen die Differentialrechnung nur *eines* – wenn auch das kraftvollste – ist.

2.6 Zur Auswahl der Aufgabe

Nachdem ich bisher allgemein über Extremwertprobleme geschrieben habe, möchte ich nun auf die Auswahl des Extremwertproblems für diese Stunde eingehen. Das Verpackungsproblem der Dose wird in Schulbüchern als ein schwierigeres Problem eingestuft (vgl. z.B. [6]). Ich habe mich dennoch dafür entschieden, es zum Einstieg zu verwenden, da es aufgrund seines Schwierigkeitsgrades folgende Vorteile bietet.

2.6.1 Vorteile der Aufgabe:

Die Problemstellung trägt mehrere Stunden. Denn ein Vergleich der als optimal errechneten Dose mit einer wirklich im Handel erhältlichen Dose zeigt, dass es hier Unterschiede gibt. Dies soll bei den Schülerinnen einen

kognitiven Konflikt auslösen, der zum einen dazu führen soll, das Vorgehen zu reflektieren und zum anderen dazu, das Modell zu verfeinern, indem beispielsweise die Falzränder berücksichtigt werden. Die Figur des kognitiven Konflikts taucht dann erneut auf: wieder gibt es Differenzen zwischen der mathematischen Lösung und der wirklichen Dose. Insgesamt wird also der

Viererschritt der Modellbildung mehrfach durchlaufen, ohne dass es zu einem gedankenlosen Abarbeiten des Verfahrens kommt, da der Sinnzusammenhang weiterhin besteht und das Problem zunehmend komplexer wird. Am Schluss solch einer Einheit können

Möglichkeiten und Grenzen einer mathematischen Weltsicht[4] diskutiert werden, da nicht nur mathematische Gesichtspunkte beim Entscheidungsprozess für eine Dosenform eine Rolle spielen (vgl. [5]).

2.6.2 Nachteil der Aufgabe:

Das mehrfache aktive und problemorientierte Durchlaufen des Zyklus der Modellbildung zeigt die Grenzen der Mathematisierung auf und kann zu einer kritischen Auseinandersetzung mit industriellen Fertigungsverfahren führen. Auf der anderen Seite bietet die Optimierung von Verpackungen für die Schülerinnen keine Orientierung für das eigene Handeln (vgl. [1, S. 40].

Extremwertprobleme, die eine Orientierung für das eigene Handeln bieten, sind zu komplex für den Einstieg. Daher soll solch ein Problem zu einem späterem Zeitpunkt bearbeitet werden. Als Beispiele seinen genannt: optimale Wärmedämmung, Verkehrsfluss und Geschwindigkeit.

3 Stelle der Stunde im Unterrichtszusammenhang

3.1 Bisher wurde unterrichtet

Mein bisheriger Unterricht zur Differentialrechnung hat die im Lehrplan benannte Leitidee des Änderungsverhaltens einer Funktion in den Mittelpunkt gestellt. Die Differentialrechnung wurde demnach nicht aus der Kurvendiskussion entwickelt, sondern anhand des Verlaufs der EMTV-Aktie aus dem Wunsch heraus entwickelt, Änderungen zu beschreiben.

Der Wunsch, dieses Änderungsverhalten so genau wie möglich zu erfassen, führte auf die momentane Änderungsrate. Alternativ dazu wurde anhand einer Computersimulation der Übergang von der Sekanten- zur Tangentensteigung dynamisch veranschaulicht.

Der Begriff der Ableitungsfunktion entstand im Rahmen einer Anwendungsaufgabe anhand eines Falles, bei dem ein Autohersteller behauptet, sein Auto könne die Steigung eines Kraterrandes leicht bewältigen. Mit Hilfe der Ableitungsfunktion konnten die Schülerinnen diese Behauptung entkräften.

Die oft mühsame Bestimmung der Ableitung einer ganzrationalen Funktion konnte dadurch, dass die Schülerinnen Regeln aufdeckten, erheblich erleichtert werden.

Im ersten Halbjahr tauchten ganzrationale Funktionen auf, deren Extrema nicht exakt bestimmt werden konnten. Den damals von den Schülerinnen geäußerten Wunsch, diese bestimmen zu können, habe ich im Rahmen einer Aufgabe aus der Wirtschaft (Herstellungskosten eines Produktes) aufgegriffen. Mit Hilfe der Differentialrechnung konnte nun ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema entwickelt werden. Ein hinreichendes Kriterium steht den Schülerinnen noch nicht zur Verfügung (s.u.).

3.2 Weiterer Gang

Im Abschnitt über die Auswahl der Aufgabe auf S. 3 wurde bereits gesagt, dass die Aufgabe über mehrere Stunden trägt und wie die Problemstellung zunehmend verfeinert wird.

Im Anschluss an die Aufgabe möchte ich ein Extremwertproblem (Flächenmaximierung) behandeln, bei dem das Optimum auf dem Rand des Definitionsbereiches liegt. Damit versagt die bis dahin benutzte Methode, lediglich die notwendige Bedingung für lokale – und damit auch im Innern des Definitionsbereiches liegende – Extrema zu untersuchen. Für die Schülerinnen wird somit einsichtig, dass

1. hinreichende Kriterien für Extrema entwickelt werden müssen und
2. Randextrema zu berücksichtigen sind.

In einer Übungsphase werden dann Extrema mittels notwendiger und hinreichender Bedingungen bestimmt.

Den Abschluss der Einheit zu Extremwertproblemen soll ein umfangreiches Problem bilden, welches den Schülerinnen eigene Handlungsorientierungen aufweist (z.B. Verkehrsfluss und Geschwindigkeit, vgl. S. 4).

4 Ziel der Stunde

Die Schülerinnen lernen als wichtige Anwendung der Differentialrechnung ein Extremwertproblem kennen. Dieses Problem modellieren sie mathematisch.

(Dazu sollen sie sich handlungsorientiert klar werden, welche Zusammenhänge zwischen den variierbaren Größen bestehen. Anschließend machen sie Vorschläge für eine allgemeine Lösung des Problems. Damit vollziehen die Schülerinnen die ersten Schritte einer mathematischen Modellbildung.)

5 Überlegungen zur Methode

5.1 Entscheidungswirksame Argumente

Die methodischen Entscheidungen begründen sich aus der Lerngruppenbeschreibung (S. 1), aus den Voraussetzungen aus didaktischer Sicht (Abschnitt 2.5 auf S. 3) und aus lernpsychologischen Aspekten nach Vester ([9]).

5.2 Phase I: Problemeröffnung

Der erste entscheidende Schritt im Modellierungsprozess ist es, die Einsicht zu gewinnen, was überhaupt variiert wird (vgl. Punkt 1 auf S. 3). Nach der Begrüßung und der Motivation über die Herstellungskosten greife ich dieses Thema schnell und direkt auf, indem zwei im Handel erhältliche Konservendosen gleichen Volumens gegenüber gestellt werden. Die Schülerinnen äußern sich verbal dazu, welche Dose ihrer Meinung nach die kleinste Oberfläche besitzt. Dies ist der erste Modellierungsschritt: Erfassen der Realsituation.

5.3 Phase II: Einfluss der variierenden Größen erkunden

Die Schülerinnen sollen die Zusammenhänge der Größen beim Zylinder genauer erkunden und mit der beginnenden Fassung des Problems im Modell des Zylinders vertraut werden. Deswegen löse ich mich von den beiden Konservendosen und zeige den Schülerinnen insgesamt 10 verschiedene Zylinder. Sie besitzen dasselbe Volumen wie die Konservendosen und variieren in der Form von schmal und hoch bis breit und flach. Die Schülerinnen sollen vermuten, welcher Zylinder der oberflächenminimale ist. Durch die Vermutung setzen sich die Schülerinnen mit den Zylindern auseinander. Die Vermutung motiviert die anschließende Arbeitsphase, in der die Vermutung überprüft wird.

Dabei vermessen die Schülerinnen den Zylinder, um seine Oberfläche zu berechnen. Dazu müssen sie die Formel für die Oberfläche des Zylinders selbständig aufstellen bzw. sich ihrer erinnern. Die Formel dient später als Grundlage für die Oberflächenfunktion im mathematischen Modell.

Indem sich die Schülerinnen mit einem konkreten Zylinder messend beschäftigen, setzen sie sich auch haptisch mit dem Zylindervergleich auseinander.

Diese handlungsorientierte Erarbeitung bietet aus lernpsychologischer Sicht den Vorteil, dass mehrere Lerntypen angesprochen werden, da verschiedene Wahrnehmungskänale angesprochen werden (vgl. [9]).

In dieser Phase sind sowohl Partner- als auch Gruppenarbeit angemessenen Arbeitsformen, weil sie zur Kommunikation über den Gegenstand und zur gegenseitigen Hilfestellung einladen. Besonders letztere ist wichtig aufgrund der beschriebenen Heterogenität der Lerngruppe bezüglich ihres Wissensstandes. Ich habe mich dafür entschieden, dass sich die Schülerinnen die abstrakteren Zusammenhänge des Zylinder in Gruppen zu dritt handelnd erarbeiten, da der Herstellungsaufwand für Zylinder zur Partnerarbeit nicht zu rechtfertigen ist. Meine Aufgabe besteht darin, für zusätzliche Hilfestellungen bereit zu stehen und mir über das Fortkommen der Schülerinnen einen Überblick zu verschaffen.

Die Ergebnisse der Gruppenarbeit tragen die Schülerinnen in eine Tabelle auf einer OHP-Folie ein. Die Tabelle wird für alle auf dem OHP sichtbar gemacht. Die Folie stellt sicher, dass man sich in nachfolgenden Stunden auf die konkreten Zylinder beziehen kann und sie somit mit dem errechneten optimalen Zylinder vergleichen kann. Die Schülerinnen sollen die Tabelle erläutern, unter den gegebenen Zylindern den oberflächenminimalen herausheben und mit ihrer Vermutung vergleichen.

Die Zylinder sind in der Tabelle so angeordnet, dass der Radius von links nach rechts wächst. Die Tabelle soll somit anregen, systematisch die Oberflächen in Abhängigkeit vom Radius zu vergleichen. Gleichzeitig fördert diese Darstellung den Gedanken eines funktionalen Zusammenhanges.

Am Ende dieser Phase soll den Schülerinnen klar sein, dass die Oberfläche sowohl vom Radius der Grundfläche als auch von der Zylinderhöhe abhängt. Ist das Volumen vorgegeben, so muss sich bei wachsender Höhe der Radius verkleinern und umgekehrt. Dies ist die Grundlage für die weitere Mathematisierung.

5.4 Übergang zur Phase III

Im Sinne eines zunehmenden Grades an Abstraktheit ist ein weiterer Schritt zur Modellbildung, dass die Schülerinnen die zur Oberflächenberechnung verwendete Formel angeben.

5.5 Phase III: Mathematisches Modell aufstellen

Ist derjenige Zylinder mit der kleinsten Oberfläche unter den vorliegenden ausgemacht, muss in der nächsten Phase die Suche nach demjenigen Zylinder ausgeweitet werden, der diese Eigenschaft unter *allen möglichen Zylindern* mit vorgegeben Volumen besitzt. Dies ist das Typische an Mathematik: Man löst sich von den konkreten Gegenständen und betrachtet nur noch ihre Eigenschaften. So gibt es unendlich viele Zylinder mit festem Volumen.

Die Schülerinnen erhalten den Auftrag, sich zu überlegen, wie man allgemein die Maße des oberflächenminimalen Zylinders herausbekommen kann. Ich möchte den Schülerinnen hier zwei Minuten Zeit geben, damit sie ihre Ideen sortieren und sich ganz kurz über weiteren Schritte, die aus ihrem Vorschlag resultieren, Gedanken machen können.

Mehrere Vorschläge sind denkbar. Möglicherweise bringen die Schülerinnen folgende beiden Vorschläge dafür, wie dieses verallgemeinerte Problem mathematisch modelliert werden kann: zum einen mittels einer Wertetabelle – ggf. als weiterführende Variante davon das Zeichnen eines Graphen – zum anderen das Aufstellen einer Funktion, deren Minimum gesucht wird.

Ich bevorzuge für die Behandlung im Unterricht die Idee der Funktion, da sie auf ein genaueres Ergebnis führt als die numerische Approximation mit Hilfe einer Wertetabelle und der Klassenstufe angemessener ist. Die Idee der Funktion schafft nämlich die Verbindung zum vorangegangenen Unterricht, indem Extremstellen dieser Oberflächenfunktion gesucht werden.

Möchte eine Schülerinnen das Minimum der Oberflächenfunktion suchen, so ist es zweckmäßig, die Abhängigkeit von Radius und Höhe explizit aufzuschreiben: $A(r,h) = \ldots$. Solch eine Schreibweise ist den Schülerinnen neu, dürfte aber kaum zu größeren Problemen führen.

Da für eine Funktion in zwei Variablen kein Verfahren zur Extremwertbestimmung bekannt ist, wird die Suche nach der sogenannten Nebenbedingung, die über das Volumen Höhe und Radius miteinander verknüpft, durch diese Schreibweise motiviert.

In der Phase II haben sich die Schülerinnen selbständig die Grundlagen für die Phase III erarbeitet. Damit die Schülerinnen für die Hausaufgabe auf einen gemeinsamen Stand sind und weil die Schreibweise $A(r,h) = \ldots$ neu ist, halte ich für die gemeinsame Erarbeitung in Phase III das lehrerzentrierte Unterrichtsgespräch für die angemessene Arbeitsform.

5.6 Phase IV: Reflexion

Die Stunde entwickelt die ersten Schritte einer Modellbildung. Da das weitere Arbeiten nur möglich ist, wenn sowohl die Problemstellung als auch eine Lösungsidee verstanden sind, ist eine Besinnung auf den bisher erreichen Arbeitsstand unumgänglich. Ich werde die Schülerinnen deswegen fragen, wie weit sie auf dem Weg zur Bestimmung des oberflächenminimalen Zylinders gekommen sind.

Die eigentliche Lösung des Problems, d.h. die Bestimmung des Minimums der Oberflächenfunktion ist Gegenstand der Hausaufgabe und nicht mehr das Ziel der Stunde.

6 Überblick über den geplanten Stundenverlauf

Phase	**Sozialform**	**Aktivitäten**	**Medien**
I Problemeröffnung			
Begrüßung und Problemeröffnung	Lehrervortrag	*Lehrer:* stellt Dosen vor und erläutert den Wunsch der Wirtschaft zur Minimierung des Materialverbrauchs	2 Konservendosen gleichen Volumens
Information	Ansage	*Lehrer:* informiert über Stundenziel	Tafel
Problemstellung,erste Variationsmöglichkeiten aufdecken	kurzes Unterrichtsgespräch	*Schülerinnen:* äußern Vermutungen, welche Dose die kleinere Oberfläche besitzt	Konservendosen
II Einfluss der variierenden Größen erkunden (anhand konkreter Zylinder)			
Vermutungen äußern	Unterrichtsgespräch	*Lehrer:* stellt 10 verschiedene Zylinder gleichen Volumens vor *Schülerinnen:* stellen Vermutungen über flächenminimalen Zylinder an	Zylinder gleichen Volumens
Arbeitsauftrag	Ansage des Lehrers	*Lehrer:* stellt Arbeitsauftrag, Oberfläche zu ermitteln und Ergebnis in Tabelle einzutragen	Tafel
Arbeitsphase	Gruppenarbeit	*Lehrer:* gibt ggf. Hilfestellung *Schülerinnen:* vermessen Zylinder, berechnen Oberfläche und tragen Ergebnisse in Tabelle ein	Zylinder, Lineale, Tabelle auf OHP
Zwischenergebnis	Unterrichtsgespräch	*Schülerinnen:* 1. erklären ihr Vorgehen 2. erläutern Tabelle, stellen vorhandenen flächenminimalen Zylinder heraus 3. geben Oberflächenformel an	wie oben und Tafel
III Mathematisches Modell aufstellen (Abstraktion auf allgemeinen Fall)			
Verallgemeinerung	Lehrerimpuls	*Lehrer:* gibt Impuls	Zylinder
kurze Ideenfindung	Einzelarbeit	*Schülerinnen:* suchen nach verallgemeinerungsfähigen Ansätzen	
Ideenaustausch	Unterrichtsgespräch	*Schülerinnen:* stellen Ansätze vor	Tafel
Erarbeitung	Partnerarbeit *oder* Unterrichtsgespräch	*Schülerinnen:* erarbeiten Lösung nach Ansatz ihrer Wahl *oder* Einigung auf einen Ansatz und gemeinsame Erarbeitung an Tafel *oder* kurzes Skizzieren des möglichen weiteren Vorgehens[2]	ggf. Tafel
Zusammenfassung und Ergebnissicherung	Unterrichtsgespräch	Festhalten des Erreichten	Tafel
IV Reflexion			
Reflexion	Unterrichtsgespräch	Vergegenwärtigung des erreichten Standes	
Hausaufgabe	Ansage	Weiteren Arbeitsauftrag klären	Tafel

[2] Das Stundenziel ist erreicht, wenn mindestens ein mathematisches Modell aufgestellt wird. Die eigentliche Lösung ist Gegenstand der Hausaufgabe. Wie weit die Lösung des Problems im Unterricht verfolgt

7 Hausaufgaben

7.1 Hausaufgaben zur Stunde

In Hinblick auf den zu bildenden Spannungsbogen beim Einstieg in das Thema erschien mir eine vorbereitende Aufgabe als nicht sinnvoll.

7.2 Hausaufgaben von der Stunde

Die Hausaufgabe setzt je nach erreichtem Stand der Stunde die Arbeit an dem Problem zu Hause fort. Ich plane als Hausaufgabe die konkrete Berechnung des Radius, bei dem die Dosenoberfläche minimal wird und die Berechnung der zugehörigen minimalen Oberfläche.

Die nächste Stunde könnte dann mit der Entwicklung des kognitiven Konflikts zwischen errechneter optimaler Lösung und tatsächlicher Dosenform beginnen.

Literatur

[1] Heinz Böer. Verpackungsoptimierung. Milchtüte und Streichholzschachtel. Appelhülsen: MUED Schriftenreihe Materialsammlungen, ^{3}1999.

[2] Heinrich Bürger und Günther Malle. Funktionsuntersuchungen mit Differetialrechnung. In: mathematik lehren 103 (2000), S. 56–59.

[3] Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Schule, Jugend und Berufsbildung, Amt für Schule (Hrsg.): Lehrplan Mathematik für die gymnasiale Oberstufe. Hamburg 1990.

[4] Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Schule, Jugend und Berufsbildung, Amt für Schule (Hrsg.): Rahmenplan Mathematik. Bildungsplan Gymnasium. Sekundarstufe I. Entwurf. Hamburg 2001.

[5] Joachim Jäger. Die optimale Dose. In: mathematik lehren 81, S. 53–57.

[6] Karl-August Keil, Johannes Kratz, Hans Müller und Karl Wörle. Die Infinitesimalrechnung. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag, 1990.

[7] George Polya. Zitiert nach Heinz Jörg Claus. Extremwertaufgaben. Probleme, ihre Geschichte, Lösungen, Methoden. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1992.

[8] Heinz Schumann. Zur Geschichte präformaler Extremwertbestimmung. Vortrag auf der 5. Tagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (zugleich 6. Sitzung des Arbeitskreises Mathematikgeschichte und Unterricht der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in Bautzen-Schmochtitz (2.6.–6.6.1999)).

[9] Frederic Vester. Denken, Lernen, Vergessen. Was geht in unserem Kopf vor, wie lernt das Gehirn, und wann läßt es uns im Stich? Stuttgart ^{24}1997.

wird, ist abhängig von der zur Verfügung stehenden Zeit. Deswegen ist diese Phase sehr variable von mir zu gestalten.

Sitzplan

Unter den Namen steht die Halbjahresnote (1–6) ohne Tendenz.

[Sitzplan entfernt]