CHRISTIAN KLEINERT / SONJA KNUTZEN / LARS LANKOW−MISCHUR / SUSANNE MANSOUR / KATRIN MÖLLERS / OLAF SORGENFREI

# Lernsituation "Spielhölle"

# 1 Das etwas andere Vorwort

*Wenn das Moorhuhn kräftig meiert*

*Und dabei der Würfel eiert,*

*Wenn beim Münzwurf noch mehr geht,*

*Weil die Münze hochkant steht,*

Jauchzt Klein−Omega: "Au fein!
Himmlisch kann die Hölle sein!"

Und da hätten wir sie schon

*Unsre LERN - SI - TU - A - TION !*

# 2 Vorwort

Dieser Entwurf wurde im FS Mathematik (Paulitsch) im Jahre 2000 erstellt. Aufgrund der hohen Arbeitsbelastung der Referendarinnen und Referendare ist er momentan genauso unvollendet wie Beethovens Neunte. Nichtsdestotrotz ist diese Handreichung unserer Meinung nach eine gute Anregung für einen interessanten Stochastik−Unterricht in der Mittelstufe.

# 3 Einführung

## 3.1 Zielgruppe

Diese Einheit ist für eine neunte Klasse bestimmt, die sich noch nicht mit Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst hat. Selbstverständlich kann das Material auch für eine zehnte Klasse benutzt werden. Wir meinen, dass der zu bewältigende Stoff für eine achte Klasse zu anspruchsvoll ist.

## 3.2 Lernsituation

Wir wollen am Ende des Schuljahres am Tag des Schulfestes eine SPIELHÖLLE gestalten und das gewonnene Geld für schulische Zwecke verwenden. Die Spiele in der SPIELHÖLLE sollen von den Schülerinnen und Schülern eigens für diesen Tag entwickelt werden. Selbstverständlich wollen die Schülerinnen und Schüler einen Gewinn erwirtschaften und haben deswegen die Möglichkeit, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitslehre (und nicht mit Zinken) ihre Gewinnchancen vorher zu errechnen und zu erhöhen.

## 3.3 Inhaltliche Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler sollen:

- ein Problembewusstsein entwickeln, welches ihnen die Möglichkeit gibt, ihre Gewinnchancen einschätzen zu können.
- Spiele mit Hilfe von Baumdiagrammen und Tabellen analysieren können.
- mit mathematischen Begriffen wie relative Häufigkeit oder Erwartungswert umgehen können.
- Gelerntes an neuen Spielen austesten / nachvollziehen / überprüfen.
- eigene Spiele (unter dem Aspekt: **ich will gewinnen**) entwickeln und analysieren.
- nachvollziehen können, welche Möglichkeiten ihnen zur Manipulation (z.B. Würfel => Blei) zur Verfügung stehen.
- unsere Spielhölle für das Schulfest gestalten.

# • Mathematischer Hintergrund

Dieser Abschnitt stellt eine kurze Zusammenfassung der mathematischen Inhalte dieser Unterrichtseinheit dar. Er dient lediglich zur Auffrischung und kann daher von der fachkundigen Leserin bzw. dem fachkundigen Leser übersprungen werden.

| |
|---|
| Def.: **Zufallsexperiment**<br>Bei einem *Zufallsexperiment* sind mehrere Ergebnisse möglich. Es kann unter gleichen Bedingungen wiederholt durchgeführt werden. |

Def.: **Ergebnis** und **Ergebnisraum**
Eine Menge $\Omega:=\{\omega_1, \omega_2,..., \omega_n\}$ heißt Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, wenn jedem Versuchsausgang höchstens ein Element $\omega_i$ aus $\Omega$ zugeordnet ist. Die $\omega_i$ heißen dann Ergebnisse des Zufallsexperiments.

Def.: **Ereignis** und **Ereignisraum**
1. Jede Teilmenge A eines endlichen Ergebnisraums $\Omega$ heißt Ereignis.
2. A tritt genau dann ein, wenn sich ein Versuchsergebnis $\omega$ einstellt, das in A enthalten ist.
3. Die Menge aller Ereignisse heißt Ereignisraum.

Def.: **absolute** und **relative Häufigkeit**
Ist ein Ereignis A bei n Durchführungen eines Zufallsexperimentes H−mal eingetreten, so nennt man H seine absolute und $\frac{H}{n}$ seine relative Häufigkeit h:

$$h(A) = \frac{H}{n}.$$

**Empirisches Gesetz der großen Zahlen:**
Nach einer hinreichend großen Anzahl n von Durchführungen eines Zufallsexperimentes stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten h(A) eines Ereignisses A.

Def.: **Wahrscheinlichkeiten** und **Wahrscheinlichkeitsfunktion**
Ist jedem der Ergebnisse eines Ergebnisraumes $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_k\}$ eine reelle Zahl $P(\omega_i)$ so zugeordnet, dass

1. $0 \leq P(\omega_i)$ für alle i
2. $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... P(\omega_k) = 1$

gilt, dann heißen die Zahlen $P(\omega_i)$ Wahrscheinlichkeiten.

Eine Funktion P, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperimentes eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion (Wahrscheinlichkeitsverteilung). Ist $A = \{a_1; a_2; ...; a_r\}$ mit $a_i \in \Omega$ für alle i ein Ereignis, dann ist

3. $P(A) = P(a_1) + P(a_2) +... + P(a_r)$

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.
Für das unmögliche Ereignis setzt man $P(\emptyset) := 0$.

**Pfadregeln**
Zur Veranschaulichung von Wahrscheinlichkeitsprozessen sind häufig Pfad− oder Baumdiagramme hilfreich. Für solche Diagramme gelten folgende Regeln:

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.

1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Elementarereignis führt.

2. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die dieses Ereignis bilden.

Def.: **Gleichmäßige Verteilung**

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt gleichmäßig, wenn alle Elementarereignisse gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Def.: **LAPLACE−Experiment**

Ein stochastisches Experiment heißt LAPLACE−Experiment, wenn die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung gleichmäßig ist.

Def.: **Zufallsgröße und Ereignis X=k**

Eine Zufallsgröße X ist eine Funktion, die jedem Ergebnis eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl zuordnet. Das Ereignis X=k enthält alle Ergebnisse a, für die X(a) = k gilt.

Def.: **Verteilung der Zufallsgröße X**

Die Wahrscheinlichkeiten P(X=k), mit denen die einzelnen Werte der Zufallsgröße auftreten, gibt man oft in Tabellenform an. Eine solche Tabelle, welche die Zuordnung $k \to P(X=k)$ enthält, heißt (Wahrscheinlichkeits−) Verteilung der Zufallsgröße X.

Eine Tabelle mit fortlaufend addierten Wahrscheinlichkeiten einer Verteilung heißt kumulierte Verteilung einer Zufallsgröße.

Def.: **Erwartungswert der Zufallsgröße X**

Kann eine Zufallsgröße die Werte $a_1, a_2, ..., a_m$ annehmen, dann heißt die Summe von Produkten

$$E(X) := \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot P(X = a_j) = a_1 \cdot P(X = a_1) + a_2 \cdot P(X = a_2) + ... + a_m \cdot P(X = a_m)$$

Erwartungswert der Zufallsgröße X. Eine weitere Bezeichnung für den Erwartungswert ist $\mu$.

# 5 Gliederung der Unterrichtseinheit

**1. Phase: Einstieg**

[Möglichkeit A]

- ☒ Spiele werden vom Lehrer vorgegeben (z.B. Würfelspiele, Chuck your luck usw.), die Schülerinnen und Schüler spielen diese Spiele.
- ☒ Beim Spielen entwickeln die Schülerinnen und Schüler ein Problembewusstsein über den möglichen Ausgang. Dabei spielen folgende Fragen eine Rolle:
  - Wie sind meine Chancen?
  - Kann ich meinen Erfolg/Misserfolg vorher abschätzen?
  - Woran orientiere ich mich bei meinem Spiel?
- ☒ Diese Fragen werden erst nach dem Spielen im Unterrichtsgespräch bewusst gemacht.
- ☒ Übergang zum Moorhühnerspiel, wobei die Schülerinnen und Schüler versuchen sollen, die oben aufgeworfenen Fragen schon vor dem Spiel zu beantworten.

[Möglichkeit B]

- ☒ Der Einstieg erfolgt über ein konkretes Spiel (z.B. Moorhühner), bei dem die Schülerinnen und Schüler explizit aufgefordert werden, den Ausgang des Spiels vorher abzuschätzen.
- ☒ Die Schülerinnen und Schüler spielen.
- ☒ Die Ergebnisse und Einschätzungen der Schülerinnen und Schüler werden miteinander verglichen.

**2. Phase: Mathematisierung**

- ☒ Die Spiele werden dargestellt mit Hilfe von:
  - Baumdiagrammen
  - Tabellen.
- ☒ Die zu diesen Spielen und ihren Darstellungen nötigen mathematischen Begriffe und Regeln werden eingeführt.
- ☒ Das Gelernte wird an neuen Spielen ausgetestet, nachvollzogen und überprüft. Dabei sollen die eingeführten mathematischen Begriffe wiederholt und gefestigt werden.

**3. Phase: Transfer**

- ☒ Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und analysieren eigene Spiele unter dem Aspekt "Ich möchte gewinnen".
- ☒ Die Manipulation von Spielen kann in dieser Phase auch thematisiert werden (z.B. Würfel => Blei).
- ☒ Die Schülerinnen und Schüler manipulieren ihre eigenen Spiele (hier bieten sich Möglichkeiten zum fächerverbindenden Unterricht).
- ☒ Eine mögliche Aufgabe kann lauten: Dieses Spiel ist gezinkt. Versuche herauszufinden, wie!

**4. Phase: Präsentation**

- ☒ Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und gestalten ihre Spielhölle für ein Schulfest oder die Parallelklassen. Dabei soll es nicht (nur) darum gehen, die Spielerinnen und Spieler "abzuzocken", sondern diese auch mathematisch aufzuklären.

## ☒ Bausteine oder einzelne Unterrichtsphasen

In diesem Abschnitt werden einige Spiele dargestellt, die sich unserer Meinung nach gut für die Lernsituation "Spielhölle" eignen. Es wird sich dabei auf die Beschreibung und die Analyse der Spiele beschränkt (Phase 1 und 2), da in den anderen Phasen die Phantasie der Schülerinnen und Schüler zum Einsatz kommt.

- Der besondere Reiz von Baustein 1 (*Moorhuhn*) liegt darin, dass die Einschätzung über die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten mit der realen meist differiert. Zudem kann bei diesem Spiel der Computer eingesetzt werden.
- Baustein 2 (*Chuck your luck*) ist ein klassisches Glücksspiel, welches heute noch in den USA gespielt wird. Auch hier werden die Gewinnchancen meist falsch eingeschätzt.
- Baustein 3 (*Münzwürfe*) reduziert die Anzahl der möglichen Ergebnisse auf 2. Es bleibt somit sehr überschaubar und lässt deshalb viele übersichtliche Darstellungsformen zu. Alltagsbegriffe (wie "fifty−fifty"−Chance) können geklärt werden.
- Baustein 4 (*Meiern*) ist ein unter Schülerinnen und Schülern sehr bekanntes und beliebtes Spiel. Es erlaubt u.a. die Diskussion von außermathematischen Einflüssen ("Pokerface") auf Glücksspiele und deren Modellierbarkeit.

### 6.1 Moorhuhnjagd

**Aufgabe**

In Abwandlung an das Computerspiel "Moorhuhnjagd" lautet die Aufgabe:

"Drei Spielerinnen bzw. Spieler schießen gleichzeitig auf 6 Moorhühner, wobei sie sich nicht absprechen. Treffsicher wie die Spielerinnen/Spieler sind, trifft jede Person mit absoluter Sicherheit."

Die Schülerinnen und Schüler sollen das in der Aufgabenstellung nicht explizit angegebene Problem formulieren: Wie viele verschiedene Moorhühner werden getroffen?

In das Unterrichtsgespräch sollten folgende Arbeitsaufträge eingebaut werden:

- Die Schülerinnen und Schüler sollen vorhersagen, welches Ergebnis am häufigsten, am zweithäufigsten oder am seltensten erzielt wird.
- Sie sollen ihre Erwartungen (Hypothesen) für die einzelnen Ergebnisse in Prozent ausdrücken.

**Überprüfen der Hypothesen durch Experimente**

Wie können die Hypothesen überprüft werden? Die Aufgabe ist in der Realität nicht durchführbar, da das Moorhuhnspiel auf dem Computer nur für eine Person programmiert wurde und die absolute Treffsicherheit nicht gewährleistet ist. Daher muss die Situation mit anderen Mitteln nachgebildet (simuliert) werden. Als mögliche Beispiele bieten sich an:

- An der Tafel werden 6 Moorhühner abgebildet. Drei Schülerinnen bzw. Schüler wählen sich ein Moorhuhn aus und werfen dann gleichzeitig mit Kreide auf das ausgewählte Moorhuhn.
  **Problem:** Die Moorhühner werden nicht sicher getroffen. Eine große Anzahl an Versuchen dauert zu lange. Es können nur drei Personen teilnehmen.
- Jedes Moorhuhn bekommt eine Nummer zwischen 1 und 6. Jeweils drei Schülerinnen und Schüler denken sich eine Zahl zwischen 1 und 6 aus und nennen dann anschließend die Zahl.
  **Problem**: Ist die Auswahl der Nummern gleichverteilt oder besitzt ein Schüler/ eine Schülerin eine Lieblingsnummer? Inwiefern beeinflussen Strategien über die gewählten Zahlen die Wahrscheinlichkeit?
- Jedes Moorhuhn bekommt eine Nummer zwischen 1 und 6. Die Schülerinnen und Schüler würfeln mit einem Würfel dreimal. Das Ergebnis vom i−ten Wurf wird interpretiert als "Spieler i schießt und trifft das Moorhuhn, deren Nummer durch das Wurfergebnis bestimmt wird." $(1 \leq i \leq 3)$. Aus dem Ergebnis des Experiments "dreimal würfeln" kann abgelesen werden, wieviel verschiedene Moorhühner getroffen wurden.
  **Beispiel:** Das Wurfergebnis 2, 4, 6 bedeutet: Es wurden 3 Moorhühner
  1, 4, 1 bedeutet: Es wurden 2 Moorhühner
  6, 6, 6 bedeutet: Es wurde 1 Moorhuhn
  getroffen.
- Alternativ zum vorherigen Vorgehen: Es wird gleichzeitig mit drei Würfeln gewürfelt. Dann kann unmittelbar abgelesen werden, wie viele Moorhühner getroffen wurden.

Um die Ergebnisse zu dokumentieren, bietet sich folgende Möglichkeit an: Es werden zunächst 25 Versuche durchgeführt. Die Ergebnisse werden in einer Liste dokumentiert, in eine Strichliste übertragen und abschließend in folgende Tabelle eingetragen:

| **Zahl der getroffenen Moorhühner** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **Anzahl der Treffer (absolute Häufigkeit)** | | | |

**Von den Versuchen zu den Vorhersagen**

Wie können nun die behaupteten Hypothesen, die in Prozentangaben abgegeben wurden, überprüft werden? In der Tabelle sind nur die absoluten Häufigkeiten erfasst, also natürliche Zahlen, die größer als Eins oder Null sind. Vielleicht hat auch eine Gruppe mehr als 25 Versuche durchgeführt. Dann sind sogar die absoluten Häufigkeiten nicht mehr miteinander vergleichbar. Es sollten also die relativen Häufigkeiten berechnet werden:

| **Zahl der getroffenen Moorhühner** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **Anzahl der Treffer (absolute Häufigkeit)** | | | |
| **Relative Häufigkeit** | | | |

Spätestens hier sollte die Redeweise "Wie wahrscheinlich sind die einzelnen Ergebnisse?" in den Unterricht einfließen.

Anhand der relativen Häufigkeiten sollen die Schüler und Schülerinnen nun ihre Hypothesen überprüfen und eventuell modifizieren. Dabei ist es hilfreich, die Ergebnisse für alle sichtbar zu machen, z. B. indem folgende Tabelle an der Tafel die Ergebnisse festhält:

| Zahl der getroffenen Moorhühner | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Gruppe 1 | absolute Häufigkeit | | | |
| | relative Häufigkeit | | | |
| Gruppe 2 | absolute Häufigkeit | | | |
| | relative Häufigkeit | | | |
| ... | ... | | | |
| | ... | | | |

oder:

| | absolute Häufigkeit | | | relative Häufigkeit | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahl der getroffenen Moorhühner | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| Gruppe 1 | | | | | | |
| Gruppe 2 | | | | | | |
| ... | | | | | | |

Die (neuen) Wahrscheinlichkeitsvorhersagen können nun weiter überprüft werden, indem eine größere Anzahl an Versuchen betrachtet oder durchgeführt wird (z. B. bis 500 Versuche). Dazu sollten zunächst die neuen Hypothesen für die Wahrscheinlichkeiten in absolute Häufigkeiten umgerechnet werden. Die Hypothesen, die eine gute Vorhersage für die absoluten Häufigkeiten im Versuch liefern, brauchen nicht mehr modifiziert werden. Um eine größere Anzahl an Versuchen durchzuführen, bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Durchführen von weiteren Versuchen in den Gruppen.
- Zusammenfassen von verschiedenen Gruppenergebnissen.
- Simulation mit dem Computer.

Die verschiedenen Möglichkeiten können auch miteinander kombiniert werden. Bei der Bündelung der verschiedenen Gruppenergebnisse bietet es sich an, die Gruppenergebnisse nach und nach zu bündeln. Das hat den Vorteil, dass die Abnahme der Schwankungen zwischen den Hypothesen bei zunehmender Anzahl an Experimenten deutlich wird. Hier besteht die Chance, dass die Schülerinnen und Schüler schon frühzeitig ein Gefühl für die Größe der Schwankungen in endlichen Versuchsserien entwickeln. Des weiteren kommen die Schülerinnen und Schüler intuitiv zum "Gesetz der großen Zahlen".

## 6.2 Chuck−your−luck

**Spielbeschreibung**

Chuck−your−luck ist ein Würfelspiel aus Amerika. Der Spieler wählt eine der Augenzahlen 1−6 aus und würfelt dann dreimal. Für jeden Wurf, der die gewählte Augenzahl zeigt, erhält er von der Bank 1$. Tritt seine gewählte Augenzahl nicht auf, so muss er einen Dollar an die Bank zahlen.

Beispiel:
Angenommen, der Spieler wählt die Augenzahl 6. Würfelt er dann (3;6;6), so erhält er 2$. Würfelt er aber (1;4;2), so muss er 1$ zahlen.

**Aufgabe**
Untersuche die Gewinnaussichten des Spielers!

Diese Aufgabenstellung impliziert sowohl das Bestimmen der Gewinnverteilung als auch des Erwartungswertes.

In das Unterrichtsgespräch sollten folgende Arbeitsaufträge eingebaut werden:
- Die Schülerinnen und Schüler sollen ihre Erwartungen (Hypothesen) für die einzelnen Ergebnisse in Prozent ausdrücken.
- Sie sollen vorhersagen, ob das Spiel fair ist bzw. wen der beiden Spieler es begünstigt ("Bank" oder Spieler).

**Überprüfen der Hypothesen durch Experimente**
Dieses Spiel eignet sich gut zum Nachspielen in der Klasse. Spielen die Schülerinnen und Schüler Chuck−your−luck zu zweit, liegen bereits nach kurzer Zeit viele Ereignisse vor. Es wird allerdings nicht um Dollar gespielt, sondern um Spielpunkte.

Die Ergebnisse sollten in einer Tabelle festgehalten werden, damit später viel Auswertungsmaterial vorliegt.

Bildet dieses Spiel den Einstieg in die Unterrichtseinheit "Lotto und andere Wettsysteme", bietet es sich an, zunächst mit 2 Würfeln zu spielen.

**Auswertung bzw. Mathematischer Hintergrund**
- Bestimmung der Gewinnverteilung: Vgl. Moorhühner: Übergang von der relativen zur absoluten Häufigkeit

- Erwartungswert: Ist dieses Spiel fair, so dass sich die Spielerin / der Spieler darauf einlassen sollte? Wenn nicht, wie müssten die Bedingungen geändert werden, damit das Spiel fair wird?

Folgende Fragen und Aufgaben können dabei das Spiel mathematisch beleuchten:
- Untersuche die Gewinnaussichten des Spielers, wenn die Ergebnismenge bei dreimaligem Würfeln aus den Tripeln (1;1;1), (1;1;2), (1;1;3), ... , (1;1;6), ... , (6;6;6) besteht. Begründe mit Hilfe eines Baumdiagramms, dass es 216 verschiedene Ergebnisse gibt.
- Bestimme den durchschnittlichen Gewinn pro Spiel (Erwartungswert).
- Welche Augenzahl sollte man als Spieler bei diesem Spiel wählen?
- Wie kannst Du das Spiel zu deinen Gunsten manipulieren?

## 6.3 Münzwurf

Das Beispiel "Münzwurf" eignet sich, um das Gesetz der großen Zahlen sowie die Begriffe "absolute und relative Häufigkeiten" einzuführen bzw. zu vertiefen.

**1. Phase: Einstieg**
Die Lehrperson kann mit der Klasse wetten, ob die letzte Stunde vor den Ferien in der Eisdiele verbracht wird. Dabei lautet sein Angebot sinngemäß:

*"Wenn ich jetzt eine Münze werfe, und zwar für jeden Schüler in der Klasse 1x, und bei Wappen gewinne und bei Zahl ihr, wer gewinnt dann am Ende, ihr oder ich?"*

Die Frage zielt auf eine Prognose, zu der den Schülerinnen und Schülern aber noch das Wissen fehlt. Gleichzeitig sollen sie motiviert werden, sich zu überlegen, ob es überhaupt eine faire Wette ist, denn meist wissen doch Mathematiklehrerinnen bzw. −lehrer das Ergebnis im Voraus.

Bei der Diskussion werden Mutmaßungen angestellt, und es fallen sicherlich Begriffe wie "Fifty−fifty−Chance" oder "50:50".

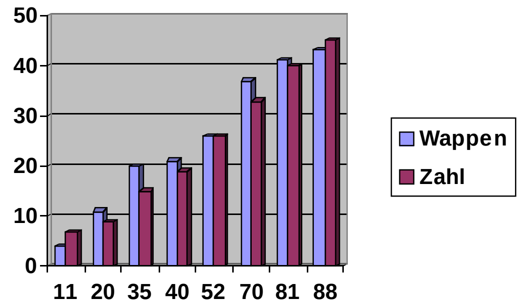
**2. Phase: Analyse**
Die Schülerinnen und Schüler machen selbst Testläufe, indem sie mehrfach ihre Münze werfen und ihre Ergebnisse notieren. Die Ergebnisse werden anschließend gesammelt, z.B. in Form einer Tabelle:

| Name des Schülers | Anzahl der Würfe | Wappen | Zahl |
|---|---|---|---|
| | **Anzahl aller Würfe** | | |
| A | 11 | 4 | 7 |
| | ***11*** | ***4*** | ***7*** |
| B | 9 | 7 | 2 |
| | ***20*** | ***11*** | ***9*** |
| C | 15 | 9 | 6 |
| | ***35*** | ***20*** | ***15*** |
| D | 5 | 1 | 4 |
| | ***40*** | ***21*** | ***19*** |
| E | 12 | 5 | 7 |
| | ***52*** | ***26*** | ***26*** |
| F | 18 | 11 | 7 |
| | ***70*** | ***37*** | ***33*** |
| G | 11 | 4 | 7 |
| | ***81*** | ***41*** | ***40*** |
| H | 7 | 2 | 5 |
| | ***88*** | ***43*** | ***54*** |

(Ergebnisse frei erfunden!)

Bei der Sammlung der Ergebnisse werden zunächst nur die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler notiert und erst dann die Überlegung, alle Ergebnisse zu bündeln (blaue Zahlen), entwickelt.

Eine weitere Art, die Ergebnisse zu präsentieren, sind Balkendiagramme. Diese suggerieren schon das Gesetz der großen Zahlen:




Dieses Diagramm lässt sich durch beliebig viele Werte ergänzen.

An dieser Stelle lassen sich dann Begriffe einführen wie absolute und relative Häufigkeit. Man bezieht dabei die tatsächlich geworfenen (die absoluten) Werte für Wappen und Zahl auf die Gesamtzahl an Würfen und erhält somit die relativen Häufigkeiten.

Um die Unterscheidung der beiden Begriffe zu festigen, kann man sehr gut für jeden einzelnen Balken aus 3. die Prozentwerte ermitteln lassen (eventuell als Wiederholung der Prozentrechnung).

Ergebnisse in %:

| Anzahl der Würfe | 11 | 20 | 35 | 40 | 52 | 70 | 81 | 88 | Durchschnitt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wappen | 36,4 | 55,0 | 57,1 | 52,5 | 50,0 | 52,9 | 50,6 | 48,9 | 50,4 |
| Zahl | 63,6 | 45,0 | 42,9 | 47,5 | 50,0 | 47,1 | 49,4 | 51,1 | 49,6 |

Das Ergebnis sollte sein, dass sich die Werte immer mehr der 50% Grenze annähern.

Anhand dieser Werte kann man den in der Eingangsphase aufgekommenen Begriff "fifty−fifty−Chance" wieder aufgreifen. Hierzu gebraucht man relative Häufigkeiten i. S. v. "bei 100 Würfen ist damit zu rechnen, dass 50x Wappen und 50x Zahl fallen".

Als letzten Aspekt dieser Münzwürfe sollte man nun die Frage thematisieren, wie denn die Chancen bei nur einem Münzwurf sind. Dies zielt auf die Überlegung, ob man nicht bei der Eingangswette den Wurfaufwand verringern kann, und ob es nicht reicht, überhaupt nur einmal zu werfen.

**3. Phase: Transfer und Manipulation der Münzen**

Sollte man die Phase mit Hilfe des Beispiels "Münzwurf" durchführen wollen, sollte man an dieser Stelle einfach die Eingangswette durchführen, allerdings mit einer *gezinkten (= manipulierten) Münze.* Dabei protokolliert man die Ergebnisse und betont ausdrücklich, wie hoch man gewonnen hat. An dieser Stelle müssten die Schülerinnen und Schüler bemerken, dass diese Ergebnisse nach den ganzen Vorüberlegungen ungewöhnlich sind. Hier sollte man dann das Argumentieren und Begründen üben.

Im weiteren Verlauf bieten sich Themen an wie eine Kontrolle von Spielen (Kriterien zur Überprüfung von einem "gerechten" Glücksspiel) sowie die Manipulation von Spielen.

**Ausblick**
Wenn man weiterhin mit Münzen arbeiten möchte, kann man jetzt mit Folgen von Münzwürfen weitermachen. Ein möglicher Einstieg wäre z.B. eine Reihe von Ergebnissen vorzugeben und die Schüler untersuchen zu lassen, ob die Münze gezinkt ist oder nicht. Im Verlauf der Analyse kommt man zu einer weiteren Darstellung von Versuchsergebnissen: dem Baumdiagramm. Es ist dann auch die Frage zu klären, inwieweit der zweite Münzwurf vom ersten abhängt.

## 6.4 Meiern

Die Beschreibung des Würfelspiels "Meiern" dient als weiteres Beispiel für Phase 1 (Einstieg) und / oder Phase 2 (Analyse eines Spiels) der Unterrichtseinheit.

**Spielregeln**
Bei dem Spiel "Meiern" geht es darum, in einem Kreis von beliebig vielen Teilnehmerinnen und Teilnehmern reihum mit zwei Würfeln verdeckt zu würfeln. Der höchste Wurf ist die Kombination $1$ und $2$, "Meier" genannt. Danach folgen der Sechserpasch bis Einerpasch und danach die Kombinationen $6\ \ 5$, $6\ \ 4$, $6\ \ 3$, $6\ \ 2$, $6\ \ 1$, $5\ \ 4$, $5\ \ 3$,..., $3\ \ 2$, $3\ \ 1$.

Die Kombination $3$ und $6$ zählt dabei immer als $6\ \ 3$, die $1$ und $4$ als $4\ \ 1$ usw.

Jeder Spieler / jede Spielerin muss seinem nachfolgenden Partner sagen, welchen Wert sie / er erreicht hat. Die angesagte Augenzahl muss dabei in jedem Fall höher liegen als im vorausgegangenen Wurf. Es ist natürlich erlaubt zu lügen. Die nachfolgende Spielperson entscheidet, ob sie den Wert glaubt oder nicht. Glaubt sie ihn, so übernimmt sie die Würfel, ohne den Wert zu erfahren, und muss nun erneut höher würfeln. Glaubt sie nicht, so besteht die Möglichkeit, den Wurf "aufzudecken". Je nachdem, ob die Aussage stimmt oder nicht, erhält einer von beiden einen Minuspunkt oder scheidet sofort aus.

**Einsatz des Spiels im Unterricht**
Das Spiel lässt sich als Einstieg in die Unterrichtseinheit verwenden. Es bietet sich dabei an, die Schülerinnen und Schüler in mehreren Gruppen über einen längeren Zeitraum (ca. 1 Stunde) spielen zu lassen. Als Aufgabenstellung kann der Auftrag, jeden Wurf zu notieren, an einen Protokollanten erteilt werden.

In der Auswertung des Spiels geht es nun um die Frage, ob sich ein Kriterium finden lässt, nach dem entschieden werden kann, wie groß die Chance ist, einen höheren Wurf als der Vorgänger zu erzielen. Es bietet sich hierbei an, die einzelnen Gruppen anknüpfend an ihre Erfahrungen im Spiel weiterarbeiten zu lassen. Weitere Aufgabenstellungen innerhalb der Analyse des Spiels, wie etwa die Bestimmung des Wurfes, bei dem die Chancenverteilung genau 50 zu 50 ist, bieten sich an.

**Mathematischer Hintergrund**
Das Spiel bietet sich aufgrund seines Bekanntheitsgrades als Einstieg an. Es können die ersten Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung wie etwa "die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses", "Wahrscheinlichkeitsverteilung" und "absolute

und relative Häufigkeit" anknüpfend an die Spielerfahrung innerhalb der "Analyse" des Spiels eingeführt werden.

In einer anschließenden Phase können Variationsmöglichkeiten des Spiels (z. B. eine Erweiterung auf drei Würfel) von den Schülern ausgedacht und bezüglich ihrer Gewinnchancen analysiert werden.